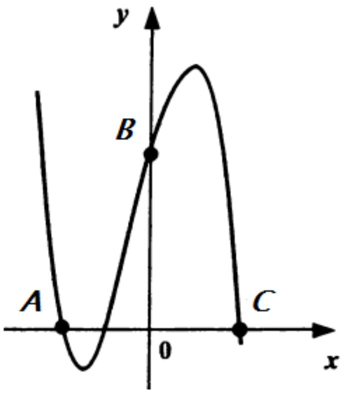
Шәһәр күләмендә математика фәненнән татар телендә үткәрелә торган олимпиаданың мәктәп этабы җаваплары
2022-2023 нче уку елы
9 нчы сыйныф

Гомуми балл – 25

1 мәсәлә.

Рәсемдә $y = 4 + 4x - x^2 - x^3$ функциясенең графигы күрсәтелгән. A, B, C нокталарының координаталарын табыгыз. (*5 балл)*



Чишелеш. В ноктасының координаталары (0; y), димәк y = 4 була, ягни B (0;4). График горизонталь сызыкны ике ноктада кисеп утә, бу очракта y = 0. Шуңа күрә тигезләмә хасил була: $0 = 4 + 4x - x^2 - x^3$, $4(1 + x) - x^2(1 + x) = 0$;
$4(1 + x) - x^2(1 + x) = 0$, $(4 - x^2)(1 + x) = 0$;
$(1 + x)(2 + x)(2 – x) = 0$; димәк $x_1 = - 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$.
A һәм C нокталары координаталарның вертикаль сызыгына симметрик булганга A(-2; 0), C(2;0. Графиктагы (-1; 0) нокта тамгаланмаган.
Җавап: A(-2; 0), B (0;4), C(2;0).

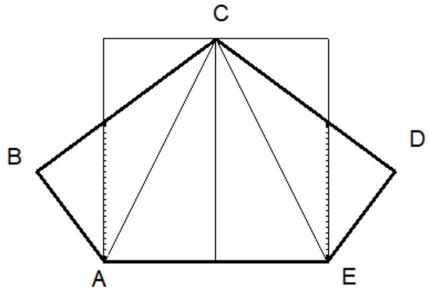
2 мәсәлә.

Бирелгән тигезләмәне $x^2 + 16x^2/(x + 4)^2 = 9$ чишегез. (*5 балл)*

Чишелеш. Тигезләмәне үзгәртеп язабыз: $x^2 - 8x^2/(x + 4) + 16x^2/(x + 4)^2 = 9 - 8x^2/(x + 4)$,
$(x - 4x/(x + 4))^2 = 9 - 8x^2/(x + 4)$, $(x - 4x/(x + 4))^2 + 8x^2/(x + 4) – 9 = 0$,
$(x^2/(x + 4))^2 + 8x^2/(x + 4) – 9 = 0$, монда $x^2/(x + 4) = z$ өчен квадрат тигезләмә күрәбез.
$z^2 + 8z – 9 = 0$ - тигезләмәнең чишелеше: $z_1 = 1$, $z_2 = - 9$.
Беренчесенән: $x^2/(x + 4) = 1$, $x^2 - x - 4 = 0$, дискриминант D = 17, $x_1 \approx - 1,56$; $x_2 \approx 2,56$.
Икенчесенән: $x^2/(x + 4) = - 9$, $x^2 + 9x + 36 = 0$, т.к. дискриминант тискәре сан (D = -63), шуңа тигезләмәнең чишелеше юк.
Җавап: $x_1 \approx - 1,56$; $x_2 \approx 2,56$.

3 мәсәлә.

ABCDE бишпочмагында ABC һәм CDE почмаклары 90^0, ә BC, DC һәм AE якларының һәрберсе икегә тигез. AB һәм DE якларының озынлыкларының суммасы да ике. ABCDE мәйданының икегә тигез булуын исбатлагыз.



Чишелеш. ABCDE бишпочмагында ABC һәм CDE почмаклары 90^0, ә BC, DC һәм AE якларының һәрберсе икегә тигез. Рәсемдә күрсәтелгән 2 х 2 булган квадраты урталай бүлсәк, ике туры почмаклы дүртпочмак хасил булыр иде. Аларны диагональләре буеннан ярып дүрт,туры почмаклы өчпочмак ясясагач, икесен диагональләре буенча рәсемдәгечә тоташтыргач

ABCDE бишпочмагын булдырабыз. ABCDE мәйданыны икегә ике булган кввдрат мәйданына , тигез.
Җавап: Бишпочмак мәйданы дүрткә тигез була.

4 мәсәлә.

Шахмат тактасының нинди дә булса горизонталенең яки вертикаленең берьюлы барлык шакмакларын башка төскә буярга рөхсәт ителә. Шулай итеп төгәл бер кара шакмаклы такта килеп чыга аламы? (*5 балл)*

Чишелеш. Юк, чыга алмый. Кара k шакмаклардан һәм ак 8 - k шакмаклардан булган горизонтальне яки вертикальне буяганда, 8 - k кара һәм k ак шакмаклар барлыкка киләчәк. Шуңа күрә кара шакмаклар саны (8 - k) – k = 8 - 2k булачак, ягни кара шакмаклар саны җеп сан булачак. Кара шакмакларның җеп булуы саклангалыктан, башлангыч 32 кара шакмактан без бер кара шакма ясый алмаячакбыз.
Җавап: *Бер кара шакмаклы гына итеп ясап булмый*

5 мәсәлә.

Теләсә нинди a – бөтен булган саннар өчен $a^5 – a$ бишкә бүленүен исбатлагыз. (*5 балл)*

Чишелеш. Бирелгән аерманы башта тапкырланучыларга таркатабыз
$a^5 – a = (a^4 - 1)\ a = a\ (a^2 - 1)\ (a^2 + 1) = (a - 1)\ a\ (a + 1)\ (a^2 + 1)$, ә аннары биш очракны карап чыгабыз: a = 5к, a = 5к +1, a = 5к +2, a = 5к +3, a = 5к +4 (к - теләсә нинди бөтен булган сан).

Кыскарак юл сайлый калсак, безгә (a - 2)-дән (a + 2)-гә тикле бер рәттән баручы биш тапкырланучы саннар алырга кирәк. Моның өчен соңгы тапкырланучы $(a^2 + 1)$-ны башка форматка китерәбез $a^2 + 1 = (a^2 - 4) + 5$.
Шулай иткәч $a^5 - a = (a - 1)\ a\ (a + 1)((a^2 - 4) + 5) = (a - 1)\ a\ (a + 1)(a^2 - 4) + 5\ (a - 1)\ a\ (a + 1) =$
$= (a - 2)(a - 1)\ a\ (a + 1)(a + 2) + 5(a - 1)\ a\ (a + 1)$. Монда кушылучыларның беренчесе бер рәттән баручы биш сан буларак 5-кә бүленә, ә икенчесендә тапкырлаучы 5-ле бар.
Җавап: *$a^5 – a$ 5-кә бүленүче форматка китерелә.*